О ГАРАНТИРОВАННОМ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев
(Челябинск, Южно-Уральский государственный университет, podivilova_elena@mail.ru, vis@prima.susu.ac.ru)

ABOUT GUARANTEED DYNAMIC SYSTEM STATE ESTIMATION

E.O. Podivilova, V.I.Shiryaev

Для решения задачи оценивания вектора состояния динамических систем в условиях неопределённости рассматривается применение фильтра Калмана и минимаксного фильтра. Фильтр Калмана применяется, когда предполагается, что возмущения и помехи, действующие на систему, являются случайными величинами с известными функциями распределения [1,2,4], а минимаксный фильтр – когда статистическая информация о возмущениях и помехах отсутствует и известны только множества их возможных значений [3,5-7]. Кроме того, рассмотрен вопрос одновременного использования фильтра Калмана и минимаксного фильтра для оценивания состояния динамической системы. Работа продолжает исследования [3,10].

Пусть процессы в системе управления описываются уравнениями:

$$x_{k+1} = A_k x_k + \Gamma_k w_k, \quad k = 0,1,\dots,N-1, \tag{1}$$

$$y_{k+1} = G_{k+1} x_{k+1} + H_{k+1} v_{k+1}, \quad k = 0,1,\dots,N-1, \tag{2}$$

где $x_k \in R^n, w_k, y_k \in R^m, v_k$ – векторы состояния системы, возмущений, измерения и ошибок измерений соответственно, A_k, Γ_k, G_k, H_k – известные матрицы.

1.Минимаксный фильтр. Известно, что x_0, w_k и v_k на k-м шаге могут принимать любые значения из некоторых заданных выпуклых множеств:

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_k \in V, \quad k = 0,1,\dots,N-1. \tag{3}$$

Гарантированное оценивание состояния системы состоит в построении последовательности информационных множеств $\overline{X}_{k+1}$, $k = 0,1,\dots,N-1$:

$$X_{k+1/k} = A_k \overline{X}_k + \Gamma_k W, \quad k = 0,1,\dots,N-1, \tag{4}$$

$$X[y_{k+1}] = \left\{ x \in R^n \middle| G_k x + H_k v = y_{k+1}, v \in V \right\}, \quad k = 0,1,\dots,N-1, \tag{5}$$

$$\overline{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0,1,\dots,N-1. \tag{6}$$

При построении минимаксного фильтра в качестве оценки x_k^* вектора состояния x_k системы (1)-(3) рассматривается чебышёвский центр информационного множества $\overline{X}_k$ [3,7].

Пример. В системе (1) – (6) матрицы G и H – единичные, $A = \begin{pmatrix} 0,9976 & 0,04639 \\ -0,09278 & 0,8584 \end{pmatrix}$,

$\Gamma = \begin{pmatrix} 0,1189 \cdot 10^{-3} \\ 4,639 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$, множества $X_0 = \left\{ x \in R^2 \middle| -7,5 \cdot 10^{-4} \le x(1) \le 7,5 \cdot 10^{-4}, -0,03 \le x(2) \le 0,03 \right\}$,

$W = \left\{ w \in R \middle| -1,5 \le w \le 1,5 \right\}$, $V = \left\{ v \in R^2 \middle| -1,45 \cdot 10^{-4} \le v(1) \le 1,45 \cdot 10^{-4}, -0,0228 \le v(2) \le 0,0228 \right\}$.

Для моделирования процесса будем считать, что $x_0 = 0$, а w_k и v_k периодически меняются по вершинам множеств W и V соответственно в различном порядке (реализация 1 и реализация 2). Поскольку w_k и v_k меняются периодически, то и при построении информационных множеств можно наблюдать периодичность в форме и размерах информационных множеств (рис.1,2).

Размер и форма информационных множеств различаются в зависимости от реализованных возмущений и помех. В реализации 1 информационное множество в лучшем случае образует отрезок, а в остальных - выпуклые многоугольники. А в реализации 2 некоторых итерациях информационные множества стягиваются в точки и отрезки (рис.2). Во втором случае даже при наличии возмущений и помех измерений на некоторых итерациях можно точно оценить состояние системы.

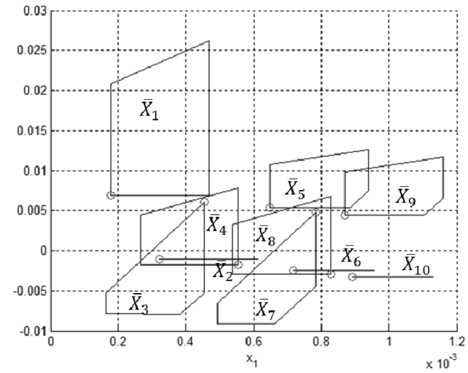

Рис.1. Эволюция информационных множеств (реализация 1)

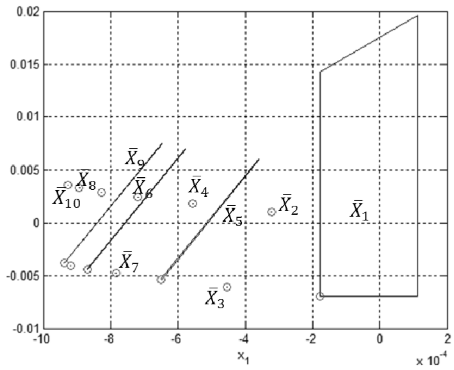

Рис.2. Эволюция информационных множеств(реализация 2)

2. Фильтр Калмана. Известно, что $w_k \sim N(0,Q)$, $v_k \sim N(0,R)$, $x_0 \sim N(0,P_0)$. Уравнение фильтра Калмана имеет вид (см. например [1,2]):

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - G\hat{x}_k), \quad k = 0,1,...,N-1, \tag{7}$$

$$K_k = (AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma')((AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma') + HR_kH')^{-1}, \quad k = 1,2,...,N, \tag{8}$$

$$P_k = (I - K_k)(AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma'), \quad k = 1,2,...,N. \tag{9}$$

Матрицы ковариаций зададим таким образом, чтобы случайные величины x_0, w, v на уровне 3σ попадали во множества X_0, W, V, т.е. аппроксимируем множества X_0, W, V описанными эллипсами: $P_0 = 10^{-4} diag(0{,}0016;1{,}6044)$, $Q = 0{,}25$, $R = 10^{-4} diag(0{,}0005;1{,}1378)$. При этом стоит отметить, что хотя и предполагается, что случайные величины имеют известные характеристики распределения, в данном примере рассматривается единственная реализация процесса. Действительное значение вектора состояния системы на уровне 3σ попадает во множество $(x_k - \hat{x}_k)' P_k^{-1} (x_k - \hat{x}_k) = l^2$. Вероятность нахождения вектора x_k внутри полученного эллипса при *l = 3* равна 0,989.

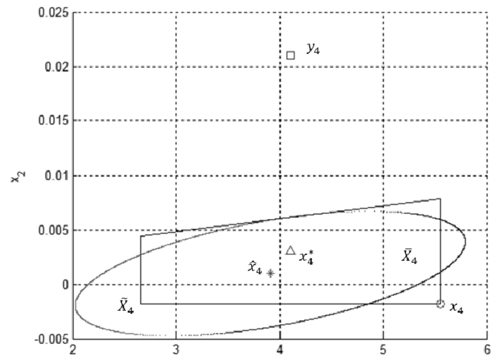

Рис.3 Сравнение информационного множества и доверительной области

3. Сравнение доверительных областей и информационных множеств. В данных реализациях получается, что истинные значения вектора состояния на некоторых итерациях находятся за пределами доверительных эллипсов (рис.3). Это можно объяснить тем, что возмущения и помехи выбирались на границах своих доверительных областей, где значения вероятностей этих величин достаточно мало. Т.е. такая реализация процесса при данном распределении случайных величин является маловероятной. При использовании минимаксного фильтра гарантируется, что значение вектора состояния находится внутри информационного множества. Отметим, что даже если на каком-то шаге оценка вектора состояния совпадёт с истинным значением вектора состояния, то фильтр Калмана в отличие от минимаксного фильтра не сможет распознать эту ситуацию.

При сравнении мгновенных оценок фильтров получается, что в реализации 1 мгновенная оценка фильтра Калмана, в среднем ближе к истинному значению: $\sigma_K = 0{,}00436$, $\sigma_{MM} = 0{,}00514$, а при реализации 2 – наоборот: $\sigma_K = 0{,}00531$, $\sigma_{MM} = 0{,}00491$.

4. Совместное использование фильтров. Информационные множества и соответствующие им доверительные эллипсы на некоторых итерациях пересекаются, но ограничивают существенно различные области пространства. В связи с этим возникает вопрос о возможности уточнения информационных множеств с помощью доверительных эллипсов, полученных в результате фильтра Калмана. Рассмотрим реализацию процесса, согласно которой в рассмотренной выше системе (1)-(3) матрица A взята единичной, возмущения отсутствуют, а помехи измерения реализуются случайно из заданного множества V. На каждом шаге в качестве множественной оценки будем брать пересечение информационного множества и прямоугольника, аппроксимирующего доверительный эллипс сверху. В данном случае совместное использование фильтров позволяет существенно уменьшить размеры информационных множеств. Стоит отметить, что одновременное применение двух фильтров может привести к расхождению, например, в реализации 1 и 2, когда истинное значение вектора состояния не попадает в доверительный эллипс. Для некоторых моделей в некоторых реализациях использование фильтра Калмана для уточнения гарантированных оценок может быть весьма эффективным. Распознать такую ситуацию можно на этапе проектирования системы.

Отметим, что при использовании минимаксного фильтра возникают трудности в реализации алгоритмов оценивания при увеличении размерности пространства. В этом случае используют различные аппроксимации информационных множеств объектами заданной формы, такими как эллипсоиды [6] и полиэдры, однако при этом происходит потеря точности. Кроме того, в данной работе рассмотрены случаи, когда множества являются многоугольниками и заданы координатами вершин. При таком представлении возникают трудности в выполнении операции над множествами, в особенности операции пересечения. Существует подход, при котором множества задаются системами линейных неравенств и оценку информационного множества также необходимо получить в виде системы линейных неравенств. Тогда операция пересечения сводится к удалению из системы избыточных неравенств. Как правило, множества возмущений и помех представляют собой параллелотопы. Эту особенность также необходимо учитывать при разработке алгоритмов оценивания.

Литература

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.3. Обработка сигналов в радио- и гидролокации и приём случайных гауссовых сигналов на фоне помех. – М.: "Сов. радио", 1977. – 663 с.
2. Калман Р.Е. Идентификация систем с шумами // Успехи математических наук. Т.40, вып. 4(244). – 1985. – С.27-41.
3. Кац И.Я., Куржанский А.Б. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределённых ситуациях // Автоматика и телемеханика. – 1978. – №11. – С. 79-87.
4. Овсеевич А.И., Шматков А.М. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем // Изв. АН. Теория и системы управления. – 1997. – №4. – С. 11-16.
5. Филимонов Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – № 2. – С.11-15.
6. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 320с.
7. Ширяев В.И. Долбенков В.И., Ильин Е.Д., Подивилова Е.О. Оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности // Экстремальная робототехника // Сб. докл. Междунар. науч.-техн. конф. – СПб.: Изд-во «Политехника-сервис», 2011. С.234-243.